Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022)

Материалы Международной конференции

Екатеринбург, 27 июня–1 июля 2022 г.

Optimal Control Theory and Applications (OCTA 2022)

Proceedings of the International Conference

Yekaterinburg, Russia, June 27–July 1, 2022

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Теория оптимального управления и приложения (OCTA 2022)

Материалы Международной конференции

(Екатеринбург, 27 июня–1 июля 2022 г.)

Optimal Control Theory and Applications (OCTA 2022)

Proceedings of the International Conference

(Yekaterinburg, Russia, June 27–July 1, 2022)

Екатеринбург
2022

УДК 517.977

ББК 22.161.8

Т33

Теория оптимального управления и приложения (OCTA 2022) : материалы Международной конференции, (Екатеринбург, 27 июня–1 июля 2022 г.); — Екатеринбург : ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2022. — 349 с.

Редакторы: А. М. Тарасьев, Т. Ф. Филиппова

Конференция организована в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2022-874).

UDC 517.977

LBC 22.161.8

T33

Optimal Control Theory and Applications (OCTA 2022): Proceedings of the International Conference, Yekaterinburg, Russia, June 27–July 1, 2022.

Editors: T. F. Filippova, A. M. Tarasyev

Published by: Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia

The Conference is organized as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2022-874).

ISBN 978-5-8295-0818-0

Abstract: We have proposed a formalization of the concept of Ulam—Hyers stability for an n-order linear differential equation with additively incoming generalized action. Sufficient conditions are given to ensure such stability.

УДК 517.977

Симметрия трехмерного множества достижимости для машины Дубинса

В.С. Пацко[1], **А.А. Федотов**

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
[1] patsko@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматривается нелинейная управляемая система, известная под названием “машина Дубинса”. Величина линейной скорости предполагается постоянной и равной единице. Скалярное управление u, определяющее угловую скорость поворота вектора линейной скорости, ограничено снизу и сверху: $u\in[u_1, u_2]$, где $u_1 < 0$, $u_2 > 0$. Каноническим называется случай, когда $u_1 = -1$, $u_2 = 1$. В трехмерном фазовом пространстве x, y, φ (x, y— координаты геометрического положения, φ— угол наклона вектора скорости) исследуется множество достижимости $G(t_f)$ в момент t_f. Установлено свойство симметрии его сечений $G_\varphi(t_f)$ по угловой координате φ в некоторой вспомогательной системе координат. Основной результат работы состоит в том, что φ-сечения множества достижимости для общего и канонического случаев связаны некоторым аффинным преобразованием. Это позволяет полностью описать φ-сечения в общем случае на основе φ-сечений для канонического случая. Полученные результаты могут быть полезны при решении различных задач управления.

Ключевые слова: машина Дубинса, трехмерное множество достижимости, сечения по угловой координате, свойства симметрии.

Введение

Машиной Дубинса [3] принято называть объект, движение которого описывается соотношениями

$$\begin{gathered} \dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u; \\ u \in [u_1, u_2], \quad u_1 = \text{const} < 0, \quad u_2 = \text{const} > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь x, y— координаты геометрического положения на плоскости (ось y развернута относительно оси x на угол $\pi/2$ против часовой стрелки); u— скалярное управление, стесненное геометрическим ограничением. Угол φ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки. Условимся, что $\varphi \in (-\infty, \infty)$. Пусть $t_0 = 0$, $x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$.

В случае $u_1 = -1$, $u_2 = +1$ систему (1) назовем канонической.

Допустимыми программными управлениями считаем измеримые функции времени $t \to u(t)$, удовлетворяющие оговоренному геометрическому ограничению.

Множеством достижимости $G(t_f)$ в момент $t_f > 0$ назовем совокупность всех фазовых состояний $(x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^\mathsf{T}$ системы (1), получаемых в момент t_f при помощи допустимых программных управлений из нулевого начального фазового состояния. Символом $G_\varphi(t_f)$ обозначим двумерное φ-сечение множества $G(t_f)$.

Главная цель работы — показать, как на основе φ-сечений при неотрицательных φ для канонической системы получить φ-сечения для произвольной системы вида (1). Это будет означать, что задача об описании φ-сечений для произвольной системы вида (1) сводится к исследованию канонического случая при $\varphi \geq 0$.

1. Основные результаты

С использованием принципа максимума Понтрягина устанавливаем, что в любую точку на границе множества достижимости $G(t_f)$ можно попасть при помощи программного управления, принимающего значения u_1, 0, u_2 и имеющего не более двух переключений. При этом можно ограничиться шестью вариантами управлений:

$$\begin{array}{lll} U1: u_2,\ 0, u_2; & U2: u_1,\ 0, u_2; & U3: u_2,\ 0, u_1; \\ U4: u_1,\ 0, u_1; & U5: u_2, u_1, u_2; & U6: u_1, u_2, u_1. \end{array} \tag{2}$$

Для канонической системы такой факт доказан в [1].

Если на границе множества $G(t_f)$ рассматривать лишь точки с $\varphi(t_f) \geq 0$, то в списке (2) можно оставить только четыре типа управлений: $U1$, $U2$, $U3$, $U6$. При зафиксированном $\varphi \geq 0$ каждый из указанных четырех типов порождает [2] гладкую однопараметрическую кривую на плоскости x, y. Обозначим эти кривые через A_1, A_2, A_3, A_6. Для каждой кривой в работе получено аналитическое описание. Кривые A_1, A_6 являются дугами окружностей. Кривые A_2, A_3 имеют более сложное строение, но каждая из них может быть представлена как дуга эвольвенты круга.

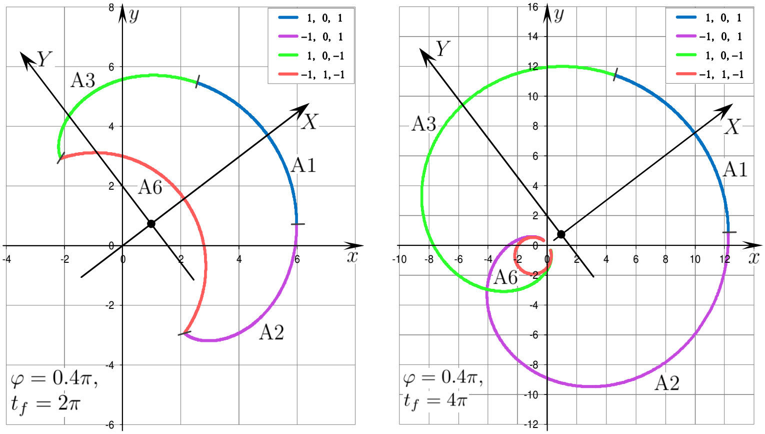

Рис. 1. Канонический случай. Два примера составной кривой.

Взяв указанные четыре кривые в последовательности $A1$, $A3$, $A6$, $A2$, получаем непрерывную кусочно-гладкую замкнутую кривую, которую обозначим символом $\mathcal{A}_\varphi(t_f)$ (далее — составная кривая). Эта кривая обладает свойством симметрии относительно оси X некоторой вспомогательной системы координат X, Y. Ось X проходит через начало координат исходной системы и развернута против часовой стрелки на угол $\varphi/2$ относительно оси x. Центр вспомогательной системы находится в точке $x = \sin\varphi$, $y = 1 - \cos\varphi$. Вспомогательная система координат не зависит от значений u_1, u_2, t_f.

Составную кривую для канонической системы обозначим $\mathcal{A}^*_\varphi(t_f)$. На рис. 1 показаны две кривые $\mathcal{A}^*_\varphi(t_f)$ при одном и том же значении φ, но разных значениях t_f.

Пусть для системы (1) надо найти φ-сечение $G_\varphi(t_f)$ при некоторых значениях $t_f > 0$ и $\varphi \in [0, t_f u_2)$.

Рассмотрим каноническую систему с ограничениями $u_1 = -1$, $u_2 = 1$. Для нее возьмем то же значение φ и новое значение

$$t^*_f = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi.$$

Используя явные формулы для компонент составных кривых $\mathcal{A}_\varphi(t_f)$ и $\mathcal{A}^*_\varphi(t^*_f)$, показываем, что данные кривые связаны аффинным соотношением

$$\mathcal{A}_\varphi(t_f) = \frac{u_1 - u_2}{2u_1u_2}\mathcal{A}^*_\varphi(t^*_f) + 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Устанавливаем, что при помощи аналогичного соотношения можно выразить φ-сечение $G_\varphi(t_f)$ для исходной системы через φ-сечение $G^*_\varphi(t^*_f)$ множества достижимости канонической системы:

$$G_\varphi(t_f) = \frac{u_1 - u_2}{2u_1u_2}G^*_\varphi(t^*_f) + 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Случай $\varphi < 0$ может быть сведен к случаю $\varphi > 0$. Рассмотрим дополнительно задачу с ограничениями $\widetilde{u}_1 = -u_2$, $\widetilde{u}_2 = -u_1$. Взяв управления $\widetilde{u}(t) = -u(t)$, получаем $\widetilde{\varphi}(t) = -\varphi(t)$, $\widetilde{x}(t) = x(t)$, $\widetilde{y}(t) = -y(t)$. Выражаем φ-сечение $G_\varphi(t_f)$ через $\widetilde{G}_{\widetilde{\varphi}}(t_f)$ отражением относительно оси x.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском Математическом Центре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
2. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 1. С. 182–197. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197
3. *Dubins L.E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // American J. Math., 1957. Vol. 79, No. 3. P. 497–516. DOI: 10.2307/2372560.

Symmetry of Three-Dimensional Reachable Set for the Dubins Car

Valerii S. Patsko[1], Andrey A. Fedotov

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia
[1] patsko@imm.uran.ru

Abstract: We consider a nonlinear control system known as the "Dubins car". The value of the linear speed is assumed to be constant and equal to 1. The scalar control u, which determines the angular rate of rotation of the linear velocity vector, is bounded from below and above: $u \in [u_1, u_2]$,

where $u_1 < 0$, $u_2 > 0$. The case is called canonical when $u_1 = -1$, $u_2 = 1$. In the three-dimensional phase space x, y, φ (x, y are the geometric position coordinates, φ is the angle of turn of the velocity vector) the reachable set $G(t_f)$ at the instant t_f is investigated. The property of symmetry of its sections $G_\varphi(t_f)$ by the angular coordinate φ in some auxiliary coordinate system is established. The main result of the paper is that the φ-sections of the reachable set for the general and canonical cases satisfy to some affine transformation. This makes it possible to completely describe φ-sections for the general case on the basis of φ-sections for the canonical case. The results obtained can be useful for solving various control problems.

УДК 517.977

К линейной задаче группового преследования с дробными производными

Н.Н. Петров[1], **А.И. Мачтакова**[2]

УдГУ, Ижевск, Россия;
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
[1] kma3@list.ru [2] bichurina.alyona@yandex.ru

Аннотация: В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего, описываемая линейной системой дифференциальных уравнений с дробными по Капуто производными. Устанавливаются достаточные условия сближения конфликтно-управляемого процесса с цилиндрическим терминальным множеством в классе квазистратегий. В качестве математической основы используются матричные разрешающие функции, являющиеся обобщением скалярных разрешающих функций.

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий, дробные производные.

Введение

В задачах конфликтного управления наряду с методами, ориентированными на построение оптимальных стратегий [1], существуют подходы, нацеленные на гарантированный результат. К таким подходам относится метод разрешающих функций, позволяющий эффективно использовать технику многозначных отображений для получения необходимых результатов [5].